

ZW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 25

Een combinatorisch vermoeden bevestigd

voor $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_6$

door

P.C. Baayen



augustus 1968

ZW

Een combinatorisch vermoeden bevestigd voor $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_6$

door

P.C. Baayen

Als $G \cong C_{n_1} \times \dots \times C_{n_k}$ met $n_i \mid n_{i+1}$ ($1 \leq i \leq k-1$), dan zij $\lambda(G) = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)$. Wij schrijven $G!$ indien G de volgende eigenschap heeft: Iedere structuur S over G met lengte $> \lambda(G)$ bevat een nulstructuur (voor de gebezigde terminologie raadplege men [2]). Mijn vermoeden is dat $G!$ voor iedere eindige abelse groep G . Voor p -groepen G is $G!$ bewezen door D. Kruyswijk, en $(C_2 \times C_2 \times C_6)!$ is aangetoond door J.H. van Lint [3]. Ons doel is hier te bewijzen dat $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_6)!$

Wij schrijven de elementen van $G = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_6 = (C_2)^4 \times C_3$ de vorm $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ met $a \in C_3$ en $b \in (C_2)^4$; zo nodig schrijven we b zelf als kolomvector ter lengte 4.

Zij $S = (x_1, \dots, x_9)$ een structuur in G , met $x_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$, en stel S is primitief. We zullen aantonen dat dit tot een tegenspraak leidt. We schrijven A voor de structuur $(a_1, \dots, a_9)$ in C_3 en B voor de structuur $(b_1, \dots, b_9)$ in $(C_2)^4$.

Opmerking 1. Alle $a_i \neq 0$. Duidelijk als $b_i = 0$. Als $b_i \neq 0$, stel dan (zonder beperking der algemeenheid) $i = 9$ en $b_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daar $\lambda(C_2 \times C_2 \times C_6) = 7$ kan uit x_1 t/m x_8 een element $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verkregen worden met $a = 0$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$; dit is òf 0, òf $-x_9$.

Opmerking 2. $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u + v \neq 0$ in $C_3 \Rightarrow u = v$.

Gevolg Twee disjuncte 0-substructuren van $B = (b_1, \dots, b_9)$ geven gelijke a -sommen.

Opmerking 3. In $(C_2)^4$ geldt: $b+c+d=0 \Leftrightarrow b=c+d \Leftrightarrow b+c=d \Leftrightarrow c=b+d$.
Een tripel met deze eigenschap moge een nul-tripel heten.

Opmerking 4. Als B drie disjuncte 0-structuren bevat is S niet primitief, daar $\lambda(C_3) = 2$. Vijf elementen van B bevatten zeker een 0-structuur, daar $\lambda((C_2)^4) = 4$.

Dus ten hoogste één $b_i = 0$; als $b_i = 0$, dan is er geen paar $b_j = b_k$ ($j \neq k$) en geen nultripel (b_j, b_k, b_l) ($j \neq k \neq l$). Ook zijn er ten hoogste twee disjuncte paren onderling gelijke elementen.

Opmerking 5. Als onder 8 onderling verschillende elementen van B geen 4 lineair onafhankelijke voorkomen, dan bevat B drie disjuncte 0-structuren (eigenschap van $(C_2)^3$). Evenzo: als onder 7 elementen van B geen 4 lineair onafhankelijke voorkomen, dan bevatten deze 7 zeker twee disjuncte 0-structuren. Tenslotte bevatten 4 lineair afhankelijke elementen van B een 0-structuur, daar $\lambda((C_2)^3) = 3$.

Opmerking 6. Uit de eigenschappen van $C_2 \times C_2 \times C_6$ volgt:
Als onder 6 onderling en van 0 verschillende elementen van B geen 4 lineair onafhankelijke voorkomen, en de overige 3 elementen van B bevatten een nulstructuur, dan bevat S een nulstructuur (vgl. [1] en [4]).

Geval 1 $b_1 = 0$. Dan geen herhalingen of nultripels (opm. 4), en de b_i met $i \geq 2$ bevatten 4 lineair onafhankelijke (opm. 5), zeg b_2, b_3, b_4 en b_5 . Dan zijn de b_i met $i \geq 6$ som van tenminste 3 b_i , $2 \leq i \leq 5$ (anders $\exists$ nultripel) maar ook van ten hoogste 3 daar $(b_2+b_3+b_4+b_5) + (\text{som van drie dgl. } b_i) = \text{de vierde } b_i$. Stel dus $b_6 = b_2 + b_3 + b_4$, $b_7 = b_2 + b_3 + b_5$, $b_8 = b_2 + b_4 + b_5$, $b_9 = b_3 + b_4 + b_5$.
Dan bevat B drie disjuncte 0-structuren, nl. (b_1) ; (b_1, b_4, b_5, b_7) ; (b_2, b_3, b_8, b_9) .

Geval 2. $b_i \neq 0$ voor alle i , $b_1 = b_2$, $b_3 + b_4 + b_5 = 0$.
Dan is $b_i \neq b_j$ voor $i, j > 2$ (opm. 4), en b_6 t/m b_9 zijn lineair

onafhankelijk (opm. 5). Neem b_6 t/m b_8 als basisvectoren voor $(C_2)^4$.

Daar de som van twee vectoren, elk met tenminste 3 coördinaten $\neq 0$, zelf ten hoogste 2 coördinaten $\neq 0$ heeft mogen we z.b.d.a.

aannemen: $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ & & 1 & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_1 & 1 & b_4 & b_3+b_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als één van de vectoren b_4, b_5 een 0 tot vierde coördinaat heeft, dan ook de andere, en we verkeren in de door opm. 6 verboden situatie. (nl. x_3 t/m $x_8 \in C_2 \times C_2 \times C_6$ terwijl $b_1+b_2=0$). Eenzelfde redenering toont dat de derde coördinaten van b_4 en b_5 beide 1 zijn. Dus (ev. na verwisseling):

$$b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dan is (volgens opm. 2 en zijn gevolg)

$$(a_1+a_2 =) \quad a_3+a_6+a_7 = a_3+a_4+a_5 = a_4+a_5+a_6+a_7, \Rightarrow a_4+a_5 = a_6+a_7 = a_3, \\ \Rightarrow a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 2a_3.$$

$$(a_1+a_2 =) \quad a_5+a_7+a_8+a_9 = a_3+a_4+a_5, \Rightarrow a_8+a_9=a_3 \neq 0 \Rightarrow a_8 = a_9 = 2a_3.$$

Maar dan volgt dat S niet primitief is: $x_3+x_4+x_7+x_8+x_9 = 0$.

Geval 3. $b_i \neq 0$ voor alle i ; $b_1 = b_2$; b_3 t/m b_9 bevatten geen nultripel. Volgens opm. 5 bevatten b_3 t/m b_9 vier lineair onafhankelijke elementen, zeg b_3, b_4, b_5, b_6 ; gebruik ze als basis voor $(C_2)^4$. Daar nultripels niet voorkomen hebben b_7, b_8 en b_9 elk precies drie coördinaten $\neq 0$. Z.b.d.a. stellen we x_1 t/m x_9 als volgt (neem $a_1 = a_2 = 1$; 1 en 2 zijn

gelijkwaardige generatoren voor C_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan: $(a_1 + a_2) \cdot 2 = a_4 + a_5 + a_8 + a_9 = a_4 + a_5 + a_3 + a_7 = a_3 + a_7 + a_8 + a_9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_3 + a_7 = a_8 + a_9 = a_4 + a_5 = \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow a_3 = a_4 = a_5 = a_7 =$
 $= a_8 = a_9 = 2.$

Ook: $2 = a_3 + a_4 + a_6 + a_8 \Rightarrow a_6 = 2.$

We gaan nu b_1 kiezen. Wegens de gelijkwaardigheid van de laatste 3 coördinaten kunnen we ons beperken tot de volgende 6 gevallen:

$b_1 = b_3$	;	dan: $x_1 + x_3 = 0$.
$b_1 = b_4$	;	" $x_1 + x_4 = 0$.
$b_1 = b_3 + b_4$	;	" $x_1 + x_4 + x_7 + x_8 + x_9 = 0$.
$b_1 = b_6 + b_5$	;	" $x_1 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 = 0$.
$b_1 = b_3 + b_4 + b_5$	;	" $x_1 + x_7 = 0$.
$b_1 = b_4 + b_5 + b_6$	;	" $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 0$.
$b_1 = b_3 + b_4 + b_5 + b_6$	;	" $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$.

Geval 4. $b_i \neq 0$ voor alle i ; $b_i \neq b_j$ als $i \neq j$

Dan bevat B een nultripel. Want stel dit ware onjuist. Daar B zeker 4 lineair onafhankelijke elementen bevat (opm. 5) mogen we aannemen dat b_1 t/m b_4 een basis voor $(C_2)^4$ vormen. Elk der $\leq b_i$ met $i > 4$ moet dan precies 3 coördinaten $\neq 0$ hebben: onmogelijk.

We laten de gemaakte basiskeuze weer los en mogen dan aannemen: $b_7 + b_8 + b_9 = 0$. Wegens opm. 6 moeten nu b_1 t/m b_6 weer 4 lineair onafhankelijke elementen bevatten; stel b_1 t/m b_4 , en neem deze als basis.

Daar $a_7 + a_8 + a_9 \neq 0$ (anders was $x_7 + x_8 + x_9 = 0$) moeten a_7, a_8, a_9 (in één of andere volgorde) of 1,1 en 2 dan wel 2,2 en 1 zijn.

Z.b.d.a. stellen we: $a_7 = a_8 = 1, a_9 = 2$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & b_7 & b_8 & b_7+b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

Subgeval 4^a $b_i + b_j + b_k = 0$ voor $i, j, k < 7$

Op aequivalentie na is er slechts één situatie, nl. $b_5 = b_1 + b_2$.

Stelt men nl. $b_5 + b_6 = b_i, i \leq 4$, terwijl b_5 en b_6 geen van beide van de vorm $b_j + b_k, j$ en $k \leq 4$, zijn, neem dan z.b.d.a. $i = 1$.

Dan moet (ev. na verwisseling) $b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $b_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Neem nu

b_6, b_5, b_3, b_4 (in die volgorde) als nieuwe basis; dan wordt b_1 de som der eerste twee basisvectoren.

Stel dus we hebben:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & b_7 & b_8 & b_7+b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Rekening houdend met de verwisselbaarheid van de eerste twee basisvectoren en ook van de laatste twee, zien we dat er voor b_6 op aequivalentie na de volgende vijf mogelijkheden zijn:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De eerste mogelijkheid vervalst, want dan heeft B de drie disjuncte 0-substructuren $(b_1, b_2, b_5), (b_3, b_4, b_6), (b_7, b_8, b_9)$. De tweede en derde zijn onderling aequivalent (neem maar b_5 als eerste basis-

vector i.p.v. b_1) en evenzo de laatste twee. Er blijven dus slechts de twee gevallen

$$b_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } b_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{te onderzoeken.}$$

(i) $b_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dan: $(a_7 + a_8 + a_9 =) 1 = a_1 + a_2 + a_5 = a_1 + a_3 + a_6 =$
 $= a_2 + a_3 + a_5 + a_6$
 $\Rightarrow a_5 = 1 + 2a_1 + 2a_2, a_6 = 1 + 2a_1 + 2a_3, 1 = a_2 + a_3 + a_5 + a_6 = 2 + a_1, \Rightarrow a_1 = 2$
 $\Rightarrow a_2 + a_5 = 2 = a_3 + a_6 \Rightarrow a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 1.$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_7 & b_8 & b_7 + b_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

$$b_7, b_8, b_7 + b_8 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Van b_7 en b_8 heeft tenminste één (zonder beperking der algemeenheid: b_7) een 1 als vierde coördinaat, daar anders de acht x_i ($i \neq 4$) in een $C_2 \times C_2 \times C_6$ zitten (cf. opm. 6). Daar wat b_1 t/m b_6 betreft de tweede en derde basis vector verwisselt kunnen worden mogen we ons voor b_7 beperken tot

$$b_7 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\alpha.$ $b_7 = b_1 + b_4.$ Dan: $a_1 + a_4 + a_7 = a_2 + a_3 + a_5 + a_6 \Rightarrow a_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_4 + x_8 + x_9 = 0.$

$\beta.$ $b_7 = b_2 + b_4.$ Dan: $a_2 + a_4 + a_7 = a_1 + a_3 + a_6 \Rightarrow a_4 = 2 \Rightarrow x_2 + x_4 + x_8 + x_9 = 0.$

$$\underline{\gamma}. \quad b_7 = b_1 + b_2 + b_4. \quad \text{Dan: } a_4 + a_5 + a_7 = a_1 + a_3 + a_6 \Rightarrow a_4 = 2 \Rightarrow x_4 + x_5 + x_8 + x_9 = 0.$$

$$\underline{\delta}. \quad b_7 = b_2 + b_3 + b_4. \quad \text{Dan: } 0 \neq a_2 + a_3 + a_4 + (a_8 + a_9) \Rightarrow a_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_8 + x_9 = 0.$$

$$\underline{\varepsilon}. \quad b_7 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4. \quad \text{Dan: } 0 \neq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + (a_8 + a_9) \Rightarrow a_4 = 1 \Rightarrow \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 = 0.$$

$$(ii) \quad b_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Dan: } \overbrace{a_1 + a_2 + a_5} = \overbrace{a_1 + a_3 + a_4 + a_6} = \overbrace{a_3 + a_4 + a_6} + \overbrace{a_1 + a_2} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 + a_2 = a_5 = a_3 + a_4 + a_6 = 2 \Rightarrow a_1 = a_2 = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a_3 & a_4 & 2 & a_6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_7 & b_8 & b_7 + b_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

Daar wat berteft b_1 t/m b_6 de eerste twee basisvectoren verwisseld mogen worden, en evenzo de laatste twee, kunnen we ons voor b_7 beperken tot

$$b_7 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\alpha}. \quad b_7 = b_1 + b_3; \quad \text{dan: } 0 \neq a_1 + a_3 + a_7 \Rightarrow a_3 = 2 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_5 + x_7 = 0.$$

$$\underline{\beta}. \quad b_7 = b_3 + b_4; \quad \text{dan: } a_3 + a_4 + a_7 = a_1 + a_2 + a_5 = 1 \Rightarrow a_3 + a_4 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_3 + x_4 + x_8 + x_9 = 0.$$

$$\underline{\gamma}. \quad b_7 = b_1 + b_2 + b_3; \quad \text{dan: } a_1 + a_2 + a_3 + a_7 = a_4 + a_6 + (a_8 + a_9) \Rightarrow a_3 = a_4 + a_6 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_3 + x_5 + x_8 + x_9 = 0.$$

$$\underline{\delta}. \quad b_7 = b_2 + b_3 + b_4; \quad \text{dan: } a_2 + a_3 + a_4 + a_7 = a_1 + a_6 + a_8 + a_9 \Rightarrow a_6 = a_3 + a_4 + 1 = \\ = 2a_3 + 2a_4 + 2 \Rightarrow a_6 = 0, \text{ in strijd met opm. 1.}$$

Subgeval 4^b. $b_i + b_j + b_k \neq 0$ voor $i, j, k \leq 6$.

Dan hebben b_5 en b_6 elk drie coördinaten $\neq 0$; z.b.d.a. stellen we:

$b_5 = b_1 + b_2 + b_3$ en $b_6 = b_1 + b_2 + b_4$. Dan:

$$(b_7 + b_8 + b_9 =) 1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_5 = a_3 + a_5 + a_4 + a_6 = a_4 + a_6 + a_1 + a_2 \Rightarrow \\ a_3 + a_5 = a_4 + a_6 = a_1 + a_2 = 2.$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 1.$$

Dan moeten b_7 en b_8 elk meer dan twee coördinaten $\neq 0$ hebben, want als bv.

$b_7 = b_i + b_j$, i en $j \leq 4$; dan is $x_i + x_j + x_7 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_7 & b_8 & b_7 + b_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$b_7 = b_1 + b_3 + b_4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 + (x_8 + x_9) = 0$$

$$b_7 = b_2 + b_3 + b_4 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 + (x_8 + x_9) = 0$$

$$b_7 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \Rightarrow x_4 + x_5 + x_7 = 0.$$

In alle gevallen blijkt S niet primitief te zijn.

Verwijzingen

- [1] P.C. Baayen, Een geval van een structuurprobleem voor abelse groepen. WN 24, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1968.
- [2] P. van Emde Boas and D. Kruyswijk, A Combinatorial problem on finite abelian groups. Rapport ZW 1967-009, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1967.
- [3] J.H. van Lint, Notitie 26, Onderafdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool Eindhoven, 1968.
- [4] J.H. van Lint, Notitie 27, Onderafdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool Eindhoven, 1968.